REVISTA Palobra PALABRA QUE OBRA

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA

Implementación de la matemática moderna en Colombia: serie matemática moderna estructurada

Implementation of modern mathematics in Colombia: modern structured mathematics series

Alfonso Segundo Gómez Mulett[1]
Universidad del Cartagena-Colombia, agomezm1@unicartagena.edu.co

RESUMEN
En este trabajo se analizó el papel desempeñado en la implementación de la matemática moderna en Colombia por la serie Matemática Moderna Estructurada, la de mayor aceptación por los profesores del nivel de bachillerato colombiano, a partir de la reforma curricular de 1976. El estudio siguió una metodología cualitativa de tipo documental y descriptivo, basada en el análisis de contenido. Se concluyó que los textos de la serie satisficieron los requerimientos curriculares del momento en que fue utilizada, pero su implementación causó problemas en el aprendizaje de la matemática moderna, porque sus conceptos no se acoplaron adecuadamente con la llamada matemática clásica.

Palabras clave: Currículo; educación secundaria; matemática moderna; reformas educativas.

ABSTRACT
This paper analyzed the role assumed in the implementation of modern mathematics in Colombia by the Modern Structured Mathematics series, the one most widely accepted by teachers at the Colombian secondary teaching level, based on the 1976 curricular reform. The study followed a qualitative methodology of documentary and descriptive type, based on content analysis. It is concluded that the texts of the series satisfied the curricular requirements of the moment in which it was used, but its implementation caused problems in the learning of modern mathematics, because their concepts did not fit properly with the so-called classical mathematics.

Keywords: Curricula; educational reforms; modern mathematics; secondary education.

Cómo citar: Gómez, A. (2021). Implementación de la matemática moderna en Colombia: serie matemática moderna estructurada. Palobra, 21(1), 24-42. https://doi.org/10.32997/2346-2884-vol.21-num.1-2021-3485

Recibido: 16 de noviembre de 2020.

Aprobado: 25 de marzo de 2021.

Editor: Ricardo Chica Gelis. Universidad de Cartagena-Colombia.

Tipología IBN Publindex:
Artículo de Investigación Científica.

Universidad de Cartagena Editorial Universitaria

[1] Licenciado en Educación área Matemáticas y Física U Pontificia Bolivariana, Especialista en Pedagogía para el Aprendizaje UNAD, Especialista en Sistemas de Información U Eafit, Magister en Matemáticas Aplicadas U Eafit, Doctor en Educación Rudecolombia Universidad de Cartagena.

INTRODUCCIÓN

A mediados de la década de los setenta, el Ministerio de Educación de Colombia implanta una reforma curricular, destinada a renovar la enseñanza tradicional de la matemática con la introducción de la llamada matemática moderna. El germen de esta reforma tuvo lugar en el Seminario Interamericano de Educación Secundaria en Santiago de Chile en 1955 y la Primera Conferencia Interamericana para la Enseñanza CIAEM, realizada en Bogotá, en diciembre de 1961, sobreviniendo después de ella, aunque un poco tarde, reformas orientadas a actualizar el currículo de matemáticas en los niveles de primaria y bachillerato. La primera de las reformas se materializó en el Decreto 45 de 1962, dividiendo el bachillerato en dos ciclos, uno básico para los primeros cuatro años y otro de enseñanza media cubriendo los dos últimos años del bachillerato. En esta reforma los contenidos matemáticos se distribuyeron de la siguiente manera: 1º y 2º años: Aritmética y nociones de Geometría; 3º y 4º años: Álgebra y Geometría; 5º Curso: Trigonometría y elementos de Geometría Analítica; y 6º Curso: Iniciativa al análisis matemático.

La inclusión del análisis matemático o cálculo en el último año del llamado bachillerato obedeció al deseo de ponerse a tono con la enseñanza de la matemática de los países más avanzados en esta materia, de acuerdo con las propuestas sobre la enseñanza de la matemática planteadas en Royaumont 1959, la reunión de la American Mathematical Association en 1959, la Conferencia del Suroeste de Asia en 1960 y el seminario sobre la enseñanza de la matemática para ingenieros y físicos de la Organización Europea para la Cooperación Económica en París en 1961.

Durante la década de los sesenta, la enseñanza de la matemática moderna comienza a introducirse en los currículos de enseñanza primaria y media en el mundo, algunos movimientos destacados en este sentido se dieron en Francia, promovido por el grupo Bourbaki, y el iniciado por George Papy en el Centro Belga de Pedagogía de la Matemática, quien publica entre 1963 y 1966 seis volúmenes sobre el tema, ocupándose en su primer volumen de contenidos como conjuntos, relaciones, funciones, sistemas de numeración, fundamentación de los números naturales y algunos ejemplos de estructuras (Papy, 1968).

La enseñanza de la matemática moderna en el bachillerato español se difunde a través de las notas de clase redactadas por Juan Casulleras y Marcos Lanuza publicadas en 1961 (González, 2006). Inicialmente la matemática moderna se enseñó en los dos últimos cursos del bachillerato incluyendo los temas: conjunto de puntos, números, operaciones, clases de equivalencia y aplicaciones entre otros; posteriormente, al final de la década de los sesenta aparecen en los textos, conceptos de operaciones binarias y estructuras algebraicas (Ausejo, 2013); sin embargo, en Portugal, el otro país integrante de la Península Ibérica, la matemática moderna se inició primero como una corriente didáctica implantada a través de varios artículos publicados en los años sesenta por profesores portugueses de matemática, donde se recogen ideas del grupo Bourbaki, Ema Castelnuovo, Frèchet y otros matemáticos contemporáneos, luego aparecieron los primeros libros escritos por Sebastião y Silva entre 1962 y 1964 (Matos, 2006), y años después, con la reforma de 1970 se publica la serie de matemática para enseñanza en los liceos bajo la autoría de António de Almeida Costa y Alfredo Osório dos Anjos la cual se utiliza hasta los años ochenta (Matos y Leme, 2011).

En América, el movimiento de la matemática moderna se inicia en Estados Unidos y Canadá al final de los años cincuenta, tomando como estrategia didáctica el pensamiento crítico apoyado en la lógica, para ello se utilizaron el texto *Introducción a la lógica* (Introduction to logic) de Patrick Suppes y la serie de Mary Dolciani *Matemáticas*, *estructura y método* (Hayden, 1981).

En Argentina, la matemática moderna se introduce primero en la enseñanza universitaria; posteriormente, durante la década de los setenta, se enseña en el nivel secundario con libros escritos para tal fin, entre ellos la serie de tres textos de Vásquez y Tapia en los cuales se introducen las nociones de sistema axiomático, conjuntos, relaciones y funciones (Falsetti, 2015); en síntesis, los propósitos de la matemática moderna fueron: organizar lo conceptual de manera unificada y general, reelaborar los tratamientos de temas tradicionales según la nueva perspectiva estructuralista y axiomática, ligar la lógica con los desarrollos matemáticos, enseñar bajo la pedagogía de la acción y el descubrimiento, redefinir los conceptos tradicionales con base en la teoría de conjuntos, algebrizar conceptos, técnicas y propiedades (Falsetti, 2015).

En Brasil la matemática moderna en la enseñanza media surge en los sesenta, uno de los primeros libros fue el texto de Sangiorgi *Curso de matemática moderna-Volumen I* editado en 1963, y posteriormente tres volúmenes mas para completar la serie destinada a la enseñanza media (Riego, 2008). A mediados de los setenta el movimiento de la matemática moderna aparece en otros países de Latinoamérica, difundido en los llamados países Bolivarianos con la introducción de los textos Serie de *Matemática Moderna Estructurada* (MME), de autores colombianos, este trabajo se propone analizar el papel de esta serie en la enseñanza de la matemática moderna en Colombia, teniendo en cuenta aspectos que le antecedieron y la influencia de otras posturas sobre el tema.

1. ELEMENTOS TEÓRICOS

1.1 Los textos escolares

Sin lugar a dudas, el texto escolar tiene una larga historia como elemento presente en la educación, los textos son una fuente predilecta para las investigaciones, porque desde hace mucho tiempo se han constituido en elemento primordial para la práctica diaria de profesores y aprendices. Debido a estos motivos, existe una amplia y variada investigación sobre libros de texto, hoy en día uno de los aspectos más estudiados es el del libro como elemento didáctico, en esta categoría tiene cabida la relación del texto con el currículo, los aspectos epistemológicos sobre un tema específico, la postura de una determinada ideología, la evolución histórica de una ciencia o disciplina y la tendencia metodológica entre otras.

Recurriendo al lenguaje ordinario, los libros de textos, textos escolares o manuales escolares hacen parte del llamado material didáctico, son libros diseñados, escritos y producidos de forma sistemática, secuencial y masiva para utilizarlos bajo el método de enseñanza simultánea (Ossenbach y Somoza, 2009), son un tipo de literatura especializada, orientada y recopilada por varias partes interesadas: especialistas, autores, editores, autoridades, que a su vez tienen la intención de servir a diferentes grupos de usuarios, que podrían ser maestros, estudiantes y padres de familia (Ibagón, 2016); por lo tanto, su objetivo no es solamente pedagógico, además de ello hay intereses económicos y políticos que determinan su estructura y contenido.

Mirando investigaciones relacionadas con la importancia de los libros de texto se encuentra que estos se constituyen en un medio de comunicación entre el currículo, el estudiante y el aprendizaje (Rodríguez, 2013); su utilización llega a ser una herramienta de tipo tecnológica para la práctica normativa que gobierna el aprendizaje, pero el éxito de la práctica depende de las mediaciones entre el profesor y los estudiantes cuando el texto se convierte mas en una guía que en un elemento impositivo (Martínez, 2002); respecto a esta afirmación, cuando se imponen los textos, el texto se convierte en el currículo, como ocurrió en Colombia con los textos de aritmética y álgebra de Aurelio Baldor en las décadas de los años sesenta y setenta.

El rol de los textos escolares varía ampliamente dependiendo del contexto y los profesores, puede ser utilizado para alentar a los estudiantes a construir nuevos conocimientos, para provocar nuevas preguntas en los estudiantes, permite equilibrar los detalles y la precisión de la información, proporciona información activa y creativa desde otro punto de vista, y la exposición teórica proporciona un sistema lógico consistente (Okeeffe, 2013); “en ese contexto discursivo, el libro de texto es el artefacto que da forma material a un modo de proceder pedagógico para la reproducción cultural” [Martínez y Rodríguez, 2010, pág.246].

Para Choppin (2004) los manuales escolares o libros de texto cumplen cuatro funciones primordiales, son un referente curricular, proponen métodos de enseñanza y modos de aprendizaje, son portadores culturales e ideológicos de conocimientos y proporcionan información que puede moldear la cultura o desarrollar el espíritu crítico de estudiantes y docentes. Además de las funciones señaladas, los libros de texto están ligados a la historia de los desarrollos curriculares, son el material que más ha perdurado en la escuela, facilitan el trabajo de estudiantes y profesores, favorecen el aprendizaje autónomo a través de las preguntas o ejercicios propuestos, son el principal recurso de instrucción y se han convertido en mediadores entre el currículo, el aprendizaje de los estudiantes y el conocimiento del profesor (Braga y Belver, 2016).

Teniendo en cuenta el papel del texto escolar como mediador, existen diferentes posturas asumidas por el profesor al respecto. El profesor tradicional concibe el texto como una enciclopedia, pone importancia en el contenido y orienta el aprendizaje siguiendo el curso sin apartarse mucho del camino mostrado; para otros, el texto es solamente una fuente de información y ceñirse a él es una forma de encasillarse, pues si se quiere generar diversas habilidades en los estudiantes debe recurrirse a otra mirada (Hurtado, 2012). Cualquiera que sea el estilo de enseñanza, debe tenerse presente la relación entre los libros de texto y las reformas curriculares, estos están ceñidos a la normatividad establecida por las políticas educativas, revelan la intención de adaptación a nuevos enfoques pedagógicos y la influencia de tendencias educativas a nivel continental y mundial (Graffe y Orrego, 2013).

La anterior exposición de motivos permite entrever porqué se van dando transformaciones en la producción de textos escolares, ajustar los contenidos educativos a las nuevas exigencias constituye siempre un reto, el texto debe sobrevivir a los cambios curriculares dados por las reformas curriculares, por lo tanto las investigaciones sobre libros de texto estarán siempre vigentes porque los textos se han convertido en objetos de estudio y aprendizaje didáctico (Vargas, 2003), ellos son poderosos intermediarios del saber y la cultura, son portadores o constructores de nuevas concepciones y prácticas educativas, objetivan relaciones entre discursos y representaciones sociales, y forman una mediación en la que de alguna manera se refleja una interpretación o desarrollo de alguna práctica de innovación pedagógica (Escolano, 2006).

2.2 La concepción de matemática moderna

Hablar de matemática moderna es algo relativo; a lo largo de los tiempos, la matemática ha experimentado un aumento en su contenido y por ende cambios en su fundamentación y su enseñanza, estos cambios comienzan con el descubrimiento de los números irracionales y continúan con la teoría deductiva de los *Elementos* de Euclides, la aparición del álgebra, la invención del cálculo y de las geometrías no euclidianas, la aritmetización del análisis, el establecimiento de la lógica matemática y las construcciones axiomáticas. Lo que aquí se llama matemática moderna corresponde al cambio dado a finales de los años cincuenta y principio de los sesenta en la presentación de los contenidos matemáticos, pasando de una base sensual-empirista cuyo método se basaba en mostrar, ejemplificar, ejercitar y aplicar, a una base constructiva axiomática amparada en el aprendizaje por descubrimiento cuyo fin es la abstracción (Ávila, 2011).

Debido a la doble función de la matemática moderna como fundamento y didáctica, no es fácil dar una definición, sin embargo se considera que los programas de la matemática moderna “señalan como objetivo primordial de la enseñanza, el dar énfasis a los procesos mentales, al significado de las operaciones y a las relaciones entre estas” [Peinado, 1967, pág.106]; sus características más notorias “son seguramente su unidad y su armonía debidas a la consideración de situaciones generales presentes en muchos casos particulares que conducen naturalmente a la formulación de teorías multivalentes” (Takahashi, 1967, pág.122).

En palabras de Carlos Olano de Lorenzo-Cáceres, se suele llamar matemática clásica a lo que hace algunos años se conocía con los nombres de aritmética, geometría, álgebra, etc., lo cual aún se sigue estudiando, los cambios no están en los temas, sino en la presentación;

> *“Los términos matemática moderna, matemática clásica no indican diferentes contenidos, o al menos no deberían indicarlo, sino en todo caso, diferentes estilos de tratar ese contenido. La matemática moderna, el estilo moderno de la matemática es más exigente, más incrédulo, y al mismo tiempo más racional, más deductivo si cabe”* (1978, pág.11)

Para Castelnuovo (2004), la matemática clásica es la que se estudiaba mediante un cúmulo de asignaturas con nombres específicos, aparentemente unas desligadas de otras, pero formaban las bases del edificio matemático; en la matemática moderna las bases se cambiaron por lógica, conjuntos, relaciones, estructuras, etc., relacionadas mediante la axiomatización; de esta apreciación es destacable el concepto de estructura como pilar en la organización de los conceptos matemáticos, y el método axiomático como guía en la integración de las nociones que conforman dicha estructuras.

Siendo el método axiomático la guía, para Abellanas (1961), la expresión axiomática es fundamental en la definición de la matemática moderna, pero no definidor, pues desde la exposición presentada en *Elementos* de Euclides ya se vislumbra una teoría deductiva muy próxima a la axiomática, por lo tanto propone la siguiente definición

> *En la matemática se definen los conceptos que se emplean (entendiendo la acción de definir en sentido lato, esto es, admitiendo también como definiciones las establecidas por los postulados) y se establecen proposiciones entre* ellos. *La matemática moderna* se *ocupa no sólo de definir* los *conceptos y establecer las proposiciones, sino de limitar el campo de validez de unos y otras.* (Abellanas, 1961, pág.1975).

En virtud de las definiciones expuestas, la matemática moderna es una presentación organizada de la matemática a partir de ciertos elementos integradores llamados estructuras, fundamentadas en la lógica, la idea de conjunto y los conceptos de relación y operación. Las estructuras, de acuerdo con los conjuntos y las relaciones que las integran, satisfacen ciertas propiedades extensibles en diferentes contextos.

2. METODOLOGÍA

Este estudio utiliza una metodología de corte cualitativo, sigue las modalidades documental y de campo, siendo un estudio ex post facto porque se evalúa la incidencia del texto escolar de matemática adaptado a un diseño curricular en un lapso del pasado; es descriptiva y está basada en el análisis de contenido porque pretende buscar rupturas epistemológicas en la comunicación de saberes; aplica también el análisis fenomenológico, procurando buscar el grado de innovación obtenido con el cambio al relacionar conceptos y ejercicios como fenómenos, teniendo en cuenta el momento actual en el cual se presentan los contenidos. La población está conformada por los seis textos escolares de la serie *Matemática Moderna Estructurada*, utilizados en los grados desde el sexto al undécimo en los niveles de enseñanza básica y media en Colombia. La serie fue escogida por ser la más utilizada en los años setenta según datos de ventas de las editoriales.

El trabajo se desarrolla en tres fases. La primera es descriptiva, se elabora un perfil de los contenidos de los textos dentro del currículo de matemática delineado por el Ministerio de Educación Nacional, a la luz de las nuevas normativas en ese momento; la segunda fase se basa en el análisis de contenido, aplicado a la exposición didáctica de conceptos, su articulación con otros temas haciendo énfasis en la estructuración de los conceptos a partir de predecesores y sucesores como categorías de análisis; la tercera fase corresponde al análisis fenomenológico didáctico centrado (Freudenthal, 1983), anclado en los datos que en este caso corresponden a los ejemplos y ejercicios, se confronta la teoría con los ejercicios resueltos y propuestos para los estudiantes, a fin de determinar si están relacionados con la estructura conceptual o presentan modelización de diferentes fenómenos de la vida real. Este último análisis se describe en forma general, aplicado a las temáticas, capítulos o unidades presentes en los textos.

Las tres fases se fundamentan en la conceptualización de libro de texto o libro escolar de Carbone (2003), para quien los libros escolares son aquellos que presentan una progresión sistemática de una materia o tema, proponiendo un orden para el aprendizaje, organizados en capítulos o lecciones, con ejemplos, comentarios, resúmenes y controles generalmente planteados como ejercicios o actividades. Estos libros se conciben como organizadores del trabajo del docente y del estudiante en la clase, siendo además libros de lectura obligatoria en las escuelas.

3. ALGUNOS TEXTOS ANTECESORES A LA SERIE MME

Varios fueron los textos publicados en Colombia en los años setenta bajo el apelativo de matemática moderna, antes de la aparición de la serie *Matemática Moderna Estructurada*; algunos de ellos son traducciones o adaptaciones de los textos publicados por el *School Mathematics Study Group* de los Estados Unidos de Norteamérica, otros fueron escritos por profesores nacionales, quienes anticipándose un poco al enfoque de la matemática moderna, publicaron libros para los niveles de enseñanza primaria y secundaria, o básica y media.

De ese conjunto de textos es importante mencionar los correspondientes a la Serie *Matemática Moderna*, publicada por Editorial Norma en 1972, una adaptación de la obra *School Mathematics*, la cual consta de cuatro libros. Los dos primeros tratan aritmética, geometría intuitiva y nociones de probabilidad y estadística; el tercero corresponde a contenidos de álgebra; el cuarto es un libro de geometría euclidiana con un toque axiomático. Los tres primeros libros son de la autoría de Eicholz, O´Daffer, Brumfiel, Shanks y Fleenor; el cuarto texto es escrito por Moise y Downs. Todos los textos utilizan definiciones apoyadas en la noción de conjunto, no tratan temas de lógica y en ellos está ausente el concepto de estructura.

Otra serie utilizada en Colombia fue *Matemáticas Modernas para Escuelas Secundarias*, dos tomos, y *Álgebra intermedia*, de Mary P Dolciani, William Wooton, Edwin F. Beckenbach y William Chinn, publicada en 1970. Los primeros dos tomos contienen aritmética, geometría y nociones de probabilidad. El tomo I enfatiza en los números enteros y el tomo II en los números racionales;

el texto de álgebra estudia números reales, polinomios, expresiones algebraicas, números complejos, ecuaciones y desigualdades, relaciones y funciones lineal, cuadrática y exponencial, todo el contenido ajustado al programa vigente en ese momento; en donde es pertinente se utiliza la teoría de conjuntos.

La novedad de los libros publicados en la primera década de los setenta consistió en introducir las definiciones básicas sobre teoría de conjuntos, utilizadas para definir los conjuntos numéricos y los conceptos de relación y función.

4. DESCRIPCIÓN DE LOS TEXTOS DE LA SMME

La serie *Matemática Moderna Estructurada* tuvo su primera edición en 1976 bajo la tutela de Editorial Norma. La serie consta de seis libros, se presentan en formato aproximado al tamaño carta con dimensiones 27 cm de largo y 20 cm de ancho, impresos en un solo cuerpo, uno para cada grado del llamado bachillerato colombiano, escrita por los profesores Hugo Guarín, Nelson Londoño, Darío Wills y Raúl Gómez; los tres primeros del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Antioquia, el último, del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Medellín. La serie se publica para poner a tono la enseñanza de la matemática con las nuevas tendencias dadas en otros países, cuyos fundamentos eran lógica y conjuntos, y también para implementar la Resolución 277 de 1975 emitida por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

El primer volumen corresponde al contenido curricular de sexto grado o primero de bachillerato, comprende 18 capítulos reunidos en doce unidades, la primera unidad se refiere a ideas básicas de conjuntos, donde se define el número natural después de introducirse el número cardinal de una clase; la segunda unidad trata los sistemas numéricos, relaciones y funciones; las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación con números naturales se exponen en las cuatro unidades siguientes; la unidad siete corresponde a teoría de números; la ocho concierne a números fraccionarios, la nueve a números decimales y las restantes a geometría plana intuitiva.

El libro dos de la serie contiene el programa curricular de séptimo grado o segundo de bachillerato. Desde siempre este curso es una mezcla de varios temas, aunque lo primordial es la introducción de los números negativos para conformar el conjunto de los enteros y los racionales. El contenido está distribuido en trece unidades y quince capítulos; la primera unidad tiene tres capítulos, inicia con un repaso sobre relaciones introduciendo relaciones de orden, relaciones de equivalencia y el concepto de clase de equivalencia, luego en el capítulo siguiente justifica la existencia de los enteros negativos, en el tercer capítulo define los racionales con base en clases de equivalencia, tratándose las operaciones tanto en enteros como en racionales. Las siguientes nueve unidades tratan temas diversos, sistema métrico decimal, unidades de superficie, de volumen, de capacidad, de peso y de tiempo; proporcionalidad, porcentajes, aligación y nociones elementales de contabilidad y comercio; las tres últimas unidades se ocupan de conceptos geométricos relacionados con áreas de figuras planas, volumen de sólidos y simetría de figuras.

Varios son los temas integrantes del volumen tres, dedicado al grado octavo o tercero de bachillerato, a grosso modo se insertan fundamentos de la matemática, álgebra tradicional, geometría deductiva y nociones de estadística descriptiva. El contenido se distribuye en once unidades y dieciocho capítulos; los fundamentos comprenden cinco unidades, las primeras cuatro incluyendo una introducción a lógica proposicional y de predicados, sistemas numéricos y números reales, y la unidad siete donde se encaja el concepto de estructura algebraica, en particular grupos. El álgebra tradicional es desarrollada a lo largo de dos unidades, la cinco sobre polinomios, abarcando en la temática de polinomios tres capítulos sobre operaciones con polinomios, factorización y fracciones algebraicas, y la seis sobre desigualdades en un solo capítulo. La geometría deductiva ocupa las unidades ocho, nueve y diez, tratando en cinco capítulos relaciones entre rectas, transformaciones geométricas, congruencia de triángulos, segmentos importantes en el triángulo, teorema de Pitágoras, área de polígonos y área del círculo; todo esto, con un enfoque deductivo, donde las demostraciones son argumentadas. La última unidad consta de un capítulo de estadística descriptiva, conteniendo organización de datos, medidas de tendencia central y de dispersión.

Continúan en el volumen cuatro para el grado noveno o último grado de la básica los temas de fundamentos, álgebra tradicional, geometría y estadística, además de una corta introducción a las relaciones en el triángulo rectángulo. El contenido está diseminado en diez unidades y diecisiete capítulos; la primera unidad contiene dos capítulos referidos a métodos de demostración y conjuntos; las unidades dos, tres, cuatro y siete contienen temas de álgebra, sistemas de ecuaciones lineales, ecuación cuadrática, números complejos, función exponencial y función logarítmica; la unidad cinco estudia la recta en el plano; la unidad seis se refiere a progresiones aritméticas y geométricas, con un enfoque basado en sucesiones; las unidades ocho, nueve y diez contienen temas de geometría, demostraciones formales relacionadas con proporcionalidad de segmentos, semejanza de triángulos, teorema de Pitágoras, volumen de sólidos y relaciones goniométricas; los temas de estadística se incluyen en la última unidad, pero en capítulo aparte conteniendo organización de datos con el histograma, medidas de tendencia central y de dispersión.

El quinto volumen contiene dieciséis capítulos en once unidades, hace énfasis en estructuras algebraicas, abarcando seis unidades en las que se exponen leyes de composición, grupos, anillos, campos, representación de vectores en R^2 y R^3, espacio vectorial, base de un espacio vectorial, matrices y transformaciones; la unidad seis estudia la función polinómica; la unidad siete contiene tres capítulos dedicados a la trigonometría; la unidad diez expone la ecuación general de segundo grado, particularizando en las secciones cónicas; la última unidad introduce nociones de probabilidad definiéndola según la axiomática de Kolmogorov, también se incluye la probabilidad condicional, el concepto de variable aleatoria y la distribución binomial.

El volumen seis es el último texto de la serie corresponde al programa del grado once o sexto, último curso de la media o bachillerato, su contenido se centra básicamente en el cálculo diferencial e integral con una introducción a lógica y conjuntos. El texto contiene dieciséis capítulos distribuidos en seis unidades; la primera de ellas agrupa en dos capítulos los temas cuantificadores, operaciones con conjuntos y métodos de demostración; la segunda unidad expone en el tercer capítulo intervalos reales, en el cuarto capítulo, valor absoluto; la tercera unidad consta solamente del capítulo cinco, presenta los conceptos de relación y función, tipos de relaciones y funciones, función inversa y álgebra de funciones; las últimas tres unidades se refieren al cálculo diferencial e integral, distribuyen el contenido en diez capítulos referidos a límite de sucesiones y funciones, continuidad de funciones, derivadas, teoremas de Rolle y del valor medio, trazado de gráficas de funciones reales, integral definida e indefinida, teorema fundamental del cálculo, métodos de integración y área bajo una curva.

En términos generales, los seis volúmenes contienen los contenidos curriculares correspondientes a los cuatro últimos grados del nivel básico y los dos grados del nivel medio, con algunas variantes motivados por la introducción de temas sobre lógica y conjuntos, lo cual se evidencia en cada uno de los textos.

5. ANÁLISIS DEL CONTENIDO DE LOS TEXTOS.

Teniendo en cuenta que el propósito es analizar el papel de la matemática moderna, el examen inicia con dichos temas. Se observa que primero se introduce la noción de conjunto, las relaciones de pertenencia e inclusión y las operaciones entre conjuntos de manera informal mediante ejemplos en el primer texto; la definición formal de las operaciones se hace en el texto tercero utilizando funciones proposicionales de la forma Ax cuyo significado es "*x es A*" o "*los x que satisfacen A*", en vez de expresar $x \in A$, dado que ya se estableció la relación de pertenencia; sin embargo en el volumen cuatro se acude a definir nuevamente las operaciones con la relación de pertenencia, presentándose de ambas maneras en el último texto de la serie; esto conduce a presentar cuatro veces los mismos temas, primero de manera instrumental, y luego cuando se introduce en la primera unidad nociones de lógica, entonces si se procede a lo formal.

Los números naturales se introducen en el primer volumen a partir del concepto de cardinal de una clase, siendo clase la familia de todos los conjuntos coordinables entre sí o equipotentes; de esta manera, el nombre de la clase es el número natural, por tanto los números naturales serían clases de conjuntos finitos; sin embargo, en la exposición no se precisa cuando un conjunto es finito, el hecho de que un conjunto sea finito se asocia a la relación de coordinación al expresar, "la coordinación de conjuntos nos divide a todos los conjuntos finitos en familias llamadas clases" (Vol. 1, pág.14), "cada clase de conjuntos coordinables define un elemento que lo llamamos cardinal" (Vol. 1, pág.15), " a todo conjunto finito se le puede asociar un número cardinal" (Vol. 1, pág.15). La definición de número natural se asocia al nombre dado a cada clase, excepto la clase de los conjuntos vacíos, de allí que el conjunto de los naturales inicia con el uno, no obstante queda la duda de que existe más de un conjunto vacío.

Después de la definición de número natural se introducen la relación de desigualdad a través de la relación de coordinación, y las operaciones con naturales de la siguiente manera: la suma, mediante el cardinal de la unión de conjuntos disjuntos; la resta, a través de la suma con la restricción de restar un número menor de otro mayor; la multiplicación, a la manera tradicional como una suma de sumandos iguales; la división se expone en tres partes, primero se habla de división exacta, luego de división inexacta y finalmente de división inexacta entera por defecto y por exceso, aspecto este que parece crear confusión dando a entender que cuando la división es inexacta hay dos posibles resultados; la potenciación, se define mediante la multiplicación reiterada; y la radicación, presenta solamente la raíz cuadrada con el correspondiente algoritmo. En cada una de las operaciones se anotan las propiedades que cumplen cada una de ellas, sin agruparlas desde las estructuras; luego la presentación de temas transcurre siguiendo el currículo oficial.

El volumen dos sigue el programa oficial sin modificación alguna en cuanto al orden, de allí que el análisis se centra en la presentación de los números enteros y racionales. Para construir los enteros primero se extienden los naturales incluyendo el cero para formar N_0, luego en el producto cartesiano N_0XN_0 define los enteros como sigue: el entero $(x\,,y)$ se define como el par

$$(x\,,y) = \begin{cases} x-y & si\ \ x \geq y \\ -(y-x) & si\ x < y \end{cases}$$

donde la parte superior corresponde a los elementos de N_0 y la parte inferior comprende los enteros negativos; así, un número entero es un número natural, el cero o un entero negativo, el conjunto de los enteros Z es la unión de los naturales, el cero y los enteros negativos. Esta definición sacrifica el concepto de número entero como una clase de equivalencia obtenida de la relación de equivalencia pertinente definida en NXN. Definidos los enteros negativos, la resta se convierte en la suma de un elemento de N_0 y un entero negativo.

En el mismo volumen los números racionales se introducen considerando primero los racionales positivos a partir de símbolos de la forma $\frac{a}{b}$ siendo $b \neq 0$, luego en el conjunto F de esos objetos se define una relación de equivalencia en el producto cartesiano $F \times F$ que divide el conjunto F en clases de equivalencia que son las fracciones equivalentes, donde cada clase del conjunto cociente es una fracción. Después se introduce el cero, los racionales negativos, operaciones con racionales, representación de racionales en notación decimal y se ordena el conjunto, previa introducción en el primer capítulo del concepto de relación de equivalencia y clase de equivalencia; de esta manera, la relación de equivalencia es excluyente porque con ella solamente se definen los racionales no negativos, aspecto que lleva a la construcción de los racionales en dos instancias.

El volumen tres inicia con los fundamentos de la matemática, incluye lógica proposicional y de predicados, conjuntos, relaciones, funciones y sistemas numéricos hasta completar los números reales, estos últimos se forman uniendo racionales e irracionales. En esta parte se recurre a la lógica para formalizar las definiciones de operaciones entre conjuntos, el concepto de relación, relación de orden, relación de equivalencia, clase de equivalencia y función, abarcando cuatro unidades. La quinta y sexta unidad contienen lo que podría llamarse álgebra clásica, es decir, temas como expresiones algebraicas, factorización y fracciones algebraicas de la llamada álgebra de Baldor; luego en la unidad siete se expone la noción de estructura algebraica, ejemplificada con grupos y simetrías en el triángulo equilátero, esta unidad debió estar antes de los sistemas numéricos para utilizarlas como parte de sus propiedades, ya que hasta este punto se han estudiado estructura de anillo en los números enteros y campo en los números racionales, siendo ese el momento oportuno para agrupar las propiedades.

Métodos de razonamiento matemático encaminados a justificar o apoyar las demostraciones geométricas inician el volumen cuatro, luego se retoman los conjuntos y sus operaciones, no se ve el propósito de repetir un tema varias veces si ya en el volumen anterior se formalizó lo básico sobre conjuntos. De acuerdo con las ideas expuestas, si se presenta la lógica desde el primer volumen, y luego con base en ella se desarrollan los conjuntos no hubiera sido necesario repetir el tema cuatro veces para expresar lo mismo.

El volumen cuatro contempla una introducción a la inferencia en el cálculo proposicional, continúa con los métodos de demostración y refutación; nuevamente despliega los conjuntos y sus operaciones, demostrando algunas propiedades de dichas operaciones apoyándose en la lógica; concluye la presentación de los conjuntos con los conceptos de partición, clase de equivalencia y conjunto cociente, aparentemente desligados del desarrollo de los temas siguientes. En cierta forma se produce una repetición de los temas sobre conjuntos para demostrar propiedades, las cuales hubiesen sido puestas como ejemplos en los métodos de demostración evitando la repetición de contenidos; además, lo importante debería ser promover el uso correcto de las reglas de inferencia básicas, para evitar caer en las falacias y dar más fortaleza al proceso argumentativo de los estudiantes.

Después de la exposición de temas correspondientes a la matemática moderna, continúa la presentación de los temas tradicionales del currículo de álgebra, sistemas de ecuaciones, determinantes, ecuación cuadrática y números complejos que se estudian después de la ecuación cuadrática, lo razonable sería estudiar primero los complejos debido a que en la solución de la cuadrática pueden resultar raíces complejas; además, debería hablarse primero de función cuadrática y luego considerar la ecuación asociada como raíces de dicha ecuación tratada como un polinomio de segundo grado. El tema de progresiones es tratado en forma correcta a partir de las sucesiones como funciones, de manera similar existe un buen tratamiento de las funciones exponencial y logarítmica, contrario a lo que se presenta en libros de la época donde está prácticamente ausente el concepto de función, como en el álgebra de Baldor, "serie es una sucesión de términos formados de acuerdo con una ley" [Baldor, 1970, pág.490].

Siguiendo el curso del análisis de contenidos, el volumen cinco introduce la noción de espacio vectorial, estudiando antes leyes de composición interna y externa, estructuras de grupo, anillo y campo, incluyendo homomorfismos y divisores de cero, temas que no se utilizan más adelante y realmente tienen un aporte poco significativo; al incluir matrices y determinantes para volver a resolver sistemas de ecuaciones lineales, hubiese sido más provechoso ubicar estos temas en el volumen cuatro, donde según el programa oficial está la solución de sistemas de ecuaciones lineales. En este punto los temas se repiten con un poco mas de contenido, se retoman las funciones polinómicas que ya se habían expuesto en el libro tres, y la ecuación general de segundo grado para estudiar las secciones cónicas; es decir, se incluye la parte faltante de la geometría analítica concentrada junto con la parte de trigonometría correspondiente a las funciones circulares y trigonométricas, temas que aparecen tal como se muestran en el currículo clásico existente antes de la Resolución 277 de 1975.

El último texto, como se dijo anteriormente, es básicamente el curso oficial de cálculo diferencial e integral un poco resumido, retomando temas de conjuntos y métodos de demostración que ya habían sido estudiados en el volumen cuatro. Los temas de cálculo se exponen con la rigurosidad muy similar a como se hace en los cursos universitarios, bajo el supuesto de comprender definiciones abstractas como la de límite e integral de Riemann.

La geometría está distribuida a lo largo de los cuatro primeros libros, en los dos primeros libros la exposición de temas referentes a áreas de figuras planas y volúmenes de sólidos es intuitiva, se justifican algunas fórmulas con procedimientos visuales y se dan propiedades de figuras geométricas. Teniendo como fundamento los métodos de demostración, algunas demostraciones relacionadas con triángulos y segmentos en la circunferencia aparecen en el libro cuatro, no obstante aparecen demostraciones sobre ángulos en la circunferencia en el texto tres, donde la palabra ejercicio toma el lugar de la palabra teorema; en pocas palabras, la presentación de la geometría es fragmentada y no se corresponde en su desarrollo con los temas de la matemática moderna. Una introducción a la estadística descriptiva y a la teoría de probabilidades se reparte en los libros tres, cuatro y cinco, la estadística descriptiva no guarda relación con los demás temas de la matemática moderna, pero la teoría de probabilidades utiliza algunas propiedades de las operaciones entre conjuntos.

De acuerdo con lo expresado en la descripción de los libros, hay un fuerte contenido de matemática clásica que no se articula adecuadamente con la propuesta de los temas relativos a la matemática moderna, los temas se repiten y se van ampliando según las necesidades.

6. ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO DE LOS TEXTOS

Los ejemplos y ejercicios de los textos, además de clarificar conceptos y ser medios para la evaluación del aprendizaje, dan oportunidad a los estudiantes para adquirir la experiencia matemática, adquirir los conocimientos necesarios para constituir los objetos mentales o estructuras matemáticas a manera de noúmenos, y los fenómenos que estos organizan respecto a la construcción de la matemática o fundamentación de la misma (Puig, 1997). En los libros de texto los ejercicios son idóneos para realizar la interpretación de hechos y fenómenos (García y Martínez, 2003), son organizadores de conceptos y revelan hasta donde se alcanza la adquisición de estos, siempre y cuando se ajusten a lo esperado, por tal razón, en esta parte se analiza si esos ejercicios contribuyen al conocimiento de la matemática moderna y a la vez están acoplados con otros conceptos de la matemática, permitiendo la transferencia del aprendizaje.

Por lo general, los libros de texto consignan los ejercicios al final de cada tema, capítulo o unidad; en este caso, los ejercicios se proponen al final de cada capítulo, y para este trabajo se clasifican en ejercicios de aprendizaje de destrezas, teóricos de ampliación y de aplicación o transferencia a la misma matemática o al mundo en que se vive; el análisis de los ejercicios se presenta en tres temáticas de acuerdo con los contenidos curriculares: aritmética y geometría en los dos primeros textos, álgebra y geometría en los textos tres y cuatro, geometría analítica y cálculo en los dos últimos textos de la serie.

Respecto a los dos primeros textos, la mayoría de los ejercicios se refieren a aprendizaje de destrezas, en ellos la matemática moderna deja de ser un elemento integrador de conceptos para convertirse en una rutina conductista mas; ejercicios con operaciones entre conjuntos son la mayor parte, después están aquellos donde se afianzan las propiedades de los números enteros y racionales relacionando algunos conceptos, así por ejemplo,

> *Escribir el conjunto A, de los múltiplos de 11 menores que 100.* (Vol. 1, p.108).
> *El equipo del colegio ganó ¾ de sus juegos y se sabe que ganó 3 más de los que perdió. ¿Cuántos juegos gan*ó? (Vol. 2, p.62).
> *Demostrar utilizando las propiedades de la adición y la multiplicación en Z que:*
> *a). si* $x + a = y + a$*, para todo* $x, y, a \in Z$*, entonces* $x = y$
> *b). si* $x \cdot a = y \cdot a$*, para todo* $x, y, a \in Z$*,* $a \neq 0$*, entonces* $x = y$ (Vol.2, p.35)

En el primer ejercicio el fenómeno es el sistema numérico, el segundo ejercicio es un caso de ampliación de la teoría incluyendo una nueva propiedad, el tercero es un caso de transferencia cercana al mundo real.

Para la parte de aritmética y geometría intuitiva podría decirse que en el primer texto hay un acercamiento de la matemática moderna al resto de la temática, el fenómeno es nuevamente el sistema de los números enteros no negativos, sin embargo la geometría guarda relación con la matemática moderna solamente en aspectos simbólicos para indicar relaciones de pertenencia, orden en cuanto a medida y expresión de conjuntos de puntos que definen figuras geométricas. Para el segundo hay una ruptura entre la puesta de los números racionales y el resto de los temas, en algunos ejercicios se trata relacionar una temática con otra, pero parece una relación forzada y no conduce a ningún fenómeno.

Los libros tres y cuatro presentan como noúmeno la matemática moderna y como fenómeno la demostración, se trata de hacer ver que a través de la demostración se materializa la matemática moderna, pero una cosa es presentar contenidos y otra es exponer las relaciones entre estos contenidos y ejemplos concretos, sobre todo en el libro tres que carga en ocho capítulos la mayor parte de esta temática, de allí que los ejercicios se concentran en mecanizar las propiedades descritas en las estructura y en los elementos geométricos. Los siguientes dos ejercicios son prueba de ello:

> *Demostrar que* $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$ *anotando en cada paso la propiedad utilizada.* (Vol. 3, pág.92).
>
> *Demostrar que en un triángulo equilátero la bisectriz de un ángulo contiene la mediana.* (Vol.3, pág.247).

La fenomenología da cuenta de un libro con ejercicios abundantes para la mecanización, sobre todo en la parte del álgebra clásica donde la semejanza con el álgebra de Baldor es notoria, aún en ejercicios que aparentemente parecen aplicables al contexto, como el siguiente:

> *La gasolina común contiene un 10% del líquido A y la gasolina de avión un 18% del mismo líquido. Se efectúa una mezcla de 16 galones de ambas gasolinas. ¿Cuál es el número mínimo de galones de gasolina de avión que debe mezclarse para preparar una mezcla que contenga al menos el 15% del líquido A?* (Vol. 3. pág.174).

En el libro cuatro insiste también en problemas de mecanización, semejantes a los ejemplos expuestos, en ellos son comunes las expresiones resolver, determinar, hallar, expresar, etc.; el proceso demostrativo es aplicado a ejemplos de geometría y no guardan relación con la vida real, muy a pesar de que es en este mundo tridimensional y a veces dimensional en el que vivimos donde tiene sentido. Algunos ejercicios pretenden contextualizar la matemática, pero corresponden a los problemas clásicos que se presentan en todos los libro, una muestra de esto es el siguiente ejercicio.

> *Hallar dos números cuya suma sea 337 y cuya diferencia sea 43.* (Vol.4, pág.62).
> *Un tanque esférico tiene un diámetro de 6 m. Determinar el número de litros que puede tener el tanque.* (Vol.4, pág.289).

El quinto volumen en sus primeros cinco capítulos correspondientes a la matemática moderna contempla el divorcio entre la matemática moderna y la realidad, los ejercicios son de afianzamiento de conceptos en su mayoría, el fenómeno se confunde entre pretender la abstracción de los conceptos y la contextualización dentro de la misma matemática a través de la ejercitación; son típicos los ejercicios que conducen a sistemas de ecuaciones para resolver matricialmente, demostración de identidades trigonométricas, identificación de la cónica a la cual corresponde una ecuación de segundo grado, cálculo de probabilidades y aplicación de conceptos de la matemática moderna como se muestra a continuación

> *Si en los reales positivos $\boldsymbol{R}^{+}$, se define la adición (+) como $x\ (+)y = x \cdot y$, y el producto $(\cdot)$ por un escalar $m\ \in \boldsymbol{R}$, como:*
> $$m(\cdot)x = \ x^m$$
> *Demostrar que $\boldsymbol{R}^{+}$ con esas operaciones es un espacio vectorial sobre $\boldsymbol{R}$.* (Vol. 5, pág.48)

Los ejercicios del volumen seis corresponden a los ejercicios típicos de cálculo, determine la inversa de una función en caso de ser posible, calcule el límite, calcule la derivada, determine la ecuación de la recta tangente, halle los puntos de máximo y mínimo relativos de una función, calcule la integral indefinida, etc. La diferencia entre este libro y cualquier otro del mismo nivel en ese tiempo está en que contiene algunos ejercicios relacionados con inferencias sencillas en el cálculo proposicional y los métodos de demostración como el siguiente:

> *Demostrar indirectamente que si x^2 es un número impar, entonces x es un número impar.* (Vol.6, pág.26).

El análisis fenomenológico evidencia la ausencia de contextualización, más bien existe una mezcla de ejercicios de la matemática moderna con la tradicional no muy bien articulados, el objetivo de la matemática moderna como fundamento de la matemática se pierde porque se vuelve a los ejercicios clásicos en todos los textos, es decir, se introducen nuevos conceptos y nuevos ejercicios sin una base que unifique teoría y contexto.

7. CONCLUSIONES

Sin lugar a dudas el noúmeno de la matemática moderna tuvo proyección a través de la SMME y sus antecesores, la serie cumplió con dos propósitos para los cuales fue escrita, introducir la matemática moderna y satisfacer los requerimientos de la normatividad sobre el currículo para matemática en los años setenta. Con la matemática moderna se buscó conseguir una enseñanza más asequible y concreta a través de la lógica y la teoría de conjuntos, introduciendo estos conceptos desde el primer grado del bachillerato de manera formal.

En cuanto a los contenidos, no existe un hilo conductor sobre el tratamiento de la matemática moderna, algunos temas, como se mostró en la tabla 1 se repiten, lo cual hace que los conceptos no se presenten en su forma completa, sino que se muestran progresivamente a medida que se avanza, ocasionando pérdida de tiempo y multiplicación de esfuerzos al repetir lo mismo. Algunos temas no se presentan en el momento adecuado, así por ejemplo, a partir de los enteros debieran aparecer las estructuras algebraicas de grupo y anillo, después de los racionales la estructura de campo; y no obstante se hace una construcción aproximada de los conjuntos numéricos, los reales resultan ser un agregado o unión de los demás conjuntos, por lo tanto, los irracionales aparecen como aquello que falta para completar los reales.

A lo largo de toda la serie ha permanecido el núcleo temático de cada curso propuesto en la reforma de 1962, la exposición clásica de los temas es mayoritaria, adornada con la introducción de temas de la matemática moderna al amparo del lenguaje y simbolismo de la teoría de conjuntos; es decir, se reescriben los temas guardando su esencia, hecho reflejado en los ejercicios, los cuales en su mayoría corresponden a aplicaciones inmediatas y variadas de los temas o algoritmos expuestos, no abundan los problemas de aplicación o contextualizados.

La SMME fue una experiencia vernácula para promover la enseñanza de la matemática moderna, y poner el currículo de matemática a la altura de otros países, la intención fue buena mas no su implementación por las razones expuestas en el análisis de resultados, pretender introducir un tema a manera de collage conceptual resulta inconveniente, y mucho más cuando no se contó con una preparación previa desde la enseñanza primaria, implementar una reforma de un solo tajo es siempre dar un salto peligroso, de allí que en los ochenta la serie fuera reemplazada por otros textos con un enfoque a lo básico.

Queda una reflexión final, debe mejorarse la práctica educativa de la matemática en los niveles de enseñanza básica y media, elaborando textos que presenten la matemática moderna desde su génesis, introduciendo términos en la medida que sea necesario, con la profundidad y el rigor preciso al alcance de los estudiantes, con ejercicios o problemas de reconocimiento y afianzamiento, de contextualización en la misma matemática y sobre todo aquellos que conectan la matemática con el mundo real siempre que la temática lo permita, de esta manera se le encuentra sentido al porqué debe estudiarse la matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abellanas, P. (1961). La matemática moderna y la enseñanza media. *Revista de Enseñanza Media*, 92-94, 1775-1804.

Ausejo, E. (2013). La introducción de la matemática moderna en la enseñanza no universitária en España (1953-1970). *La Gaceta*, 16(4), 737-747.

Ávila, A. (2011). En matemáticas... ¿qué nos dejaron las reformas de fin del siglo XX? *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 6(9), 39-50.

Baldor, A. (1970). Álgebra. México: Publicaciones Cultural.

Braga, G., y Belver, J. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación*, (27)1, 199-218.

Carbone, G. (2003). *Libros escolares. Una introducción a su análisis y evaluación*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.

Castelnuovo, E. (2004). Didáctica de la matemática moderna. (2ª. Ed). México: Editorial Trillas, S.A de C.V.

Choppin, A. (2004). *La rencontré du numérique et du manuel*. (El encuentro entre lo digital y el manual). Ponencia presentada en el Seminario Numérique et manuels scolaires et universitaires, Fontevraud, Francia. Recuperada de http://www.educnet.education.fr/dossier/manuel/default.htm

Diario Oficial 30704. Jueves 25 de enero de 1962. Decreto 45 de 1962.

Falsetti, M. (2015). Estudio del movimiento de matemática moderna en la escuela secundaria Argentina a través del análisis de libros de texto. Recuperado de http://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/20760_10105.pdf

Escolano, A. (2006). La recepción de los modelos de la Escuela Nueva en la manualística de comienzos del siglo XX. *Historia de la Educación*, 25, 317-340.

Freudenthal, H. 1983. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

García, S., y Martínez, C. (2003). Análisis del trabajo práctico en textos escolares de primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, número extra, 5-16.

González, M. (2006). La matemática moderna en España. Unión, 6, 63-71.

Graffe, G., y Orrego, G. (2013). El texto escolar colombiano y las políticas educativas durante el siglo XX. *Itinerario Educativo*, *27*(62), 91-113.

Hayden, R. (1981). A history of the "new math" movement in the United States. Iowa: Iowa State University.

Hurtado, M. (2012). Los textos escolares entre la enseñanza de contenidos o el desarrollo de competencias. *Revista Anekumene*, 3, 105-111.

Ibagón, N. (2016). *Entre ausencias y presencias ausentes. Los textos escolares y el lugar de lo negro en la enseñanza de la historia en Colombia*. Bogotá: Editorial Pontificia Universidad Javeriana.

Martínez, J. (2002). *Políticas del libro de texto escolar*. Madrid: Ediciones Morata, S.L.

Martínez, J., y Rodríguez, J. (2010). El currículum y el libro de texto escolar. Una dialéctica siempre abierta. En J. Gimeno Sacristán (Ed.). *Saberes e incertidumbres sobre el currículum* (pp. 246-268). Madrid: Morata.

Matos, J. (2006). A penetração da Matemática Moderna em Portugal na revista Labor. *Unión*, 5, 91-110.

Matos, J., y Leme, M. (2011). O Movimento da Matemática Moderna e Diferentes Propostas Curriculares para o Ensino de Geometria no Brasil e em Portugal. *Boletim de Educação Matemática*, 24(38), 171-196.

Okeeffe, L. (2013). A Framework for Textbook Analysis. International Review of Contemporary Learning Research, 2(1), 1-13.

Olano, C. y García, L. (1978). Matemática clásica y matemática moderna. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, Boletín 1, 10-18.

Ossenbach, G., y Somoza, M. (2009). *Los manuales escolares como fuente para la historia de la educación en América Latina*. Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Papy, G. (1968). *Matemática moderna-Tomo I*. Buenos Aires: Eudeba.

Peinado, R. (1967). La nueva matemática. *Boletín de Matemáticas*, 1(5), 106-112.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Ed.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* (págs. 61-94). Barcelona: Horsori.

Riego, C. (2008). A Matemática Moderna nos livros de Osvaldo Sangiorgi. Tesis de Maestría. Pontificia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

Rodríguez, C. (2013). El potencial curricular de los libros de texto para generar experiencias de aprendizaje. *Revista Educación, 37*(1), 119-129.

Takahashi, A. (1967). Algunos aspectos de la enseñanza de la matemática a nivel medio. *Boletín de Matemáticas*, 1(5), 117-147.

Vargas, J. (2003). La construcción de los irracionales de Dedekind como instrumento en un análisis de textos de octavo grado. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 14, 1-19.

Wills, D., Guarín, H., Londoño, N., y Gómez, R. (1976). *Serie Matemática moderna estructurada. Vol. 1*. Cali: Editorial Norma.

Wills, D., Guarín, H., Londoño, N., y Gómez, R. (1976). *Serie Matemática moderna estructurada. Vol. 2*. Cali: Editorial Norma.

Wills, D., Guarín, H., Londoño, N., y Gómez, R. (1976). *Serie Matemática moderna estructurada. Vol. 3*. Cali: Editorial Norma.

Wills, D., Guarín, H., Londoño, N., y Gómez, R. (1976). *Serie Matemática moderna estructurada. Vol. 4*. Cali: Editorial Norma.

Wills, D., Guarín, H., Londoño, N., y Gómez, R. (1976). *Serie Matemática moderna estructurada. Vol. 5*. Cali: Editorial Norma.

Wills, D., Guarín, H., Londoño, N., y Gómez, R. (1976). *Serie Matemática moderna estructurada. Vol. 6*. Cali: Editorial Norma.